(7)

GENERALIZZAZIONE E COROLLARI

DI

UN NOTO TEOREMA DI GEOMETRIA

PER

GIUSEPPE BRUNO

TORINO
STAMPERIA REALE
1872.

GENERALIZZAZIONE E COROLLARI

DI

UN NOTO TEOREMA DI GEOMETRIA

PER

GIUSEPPE BRUNO

TORINO
STAMPERIA REALE
1872.

Estr. dagli *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino.*
(Adunanza del 3 Dicembre 1871).

GENERALIZZAZIONE E COROLLARI

DI

UN NOTO TEOREMA DI GEOMETRIA

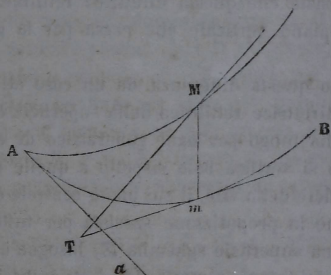
1. Il sig. Jules DE LA GOURNERIE, al n.° 992 del suo *Traité de géométrie descriptive*, occupandosi del piano tangente alla superficie di una vite a pane triangolare, disposta in guisa che la sua direttrice rettilinea sia verticale, prova che le tangenti di massima pendenza a quella superficie, nei differenti punti di una stessa sua generatrice rettilinea, formano un iperboloide rigato, la cui traccia, sopra un piano perpendicolare alla direttrice rettilinea anzinominata, è circolare.

Tal teorema può generalizzarsi assai. Esso è compreso nel seguente: Qualunque sia una superficie sghemba Σ, considerata una sua generatrice rettilinea AB, il cui piano centrale sia verticale, le rette tangenti a Σ nei successivi punti di AB, e facenti angolo massimo coll'orizzonte, hanno, per loro luogo geometrico I, un iperboloide rigato, le cui sezioni orizzontali sono circonferenze.

finchè dippiù avvenga, come nella superficie della vite a pane triangolare e direttrice rettilinea verticale, che i luoghi geometrici, come l'I sopra definito, sieno iperboloidi identici fra di loro, qualunque sia la generatrice rettilinea della Σ, cui essi si riferiscono, si richiede inoltre che le singole generatrici di questa superficie abbiano parametri di uguale lunghezza.

5. È facile il trovare la condizione a cui deve soddisfare la linea di strizione della Σ affinchè, quando i piani centrali di tutte le sue generatrici sono verticali, o, più generalmente, parallele ad una stessa retta, le dette generatrici abbiano parametri uguali.

Per questo, sia AB (fig. 2ª) una sezione retta del ci-

Fig. 2ª

lindro inviluppo dei suddetti piani centrali, M il punto centrale della generatrice MT, e T la traccia di questa generatrice sul piano della AB. Denoti m il piede della perpendicolare abbassata su questo piano dal punto M, epperciò Tm la tangente in m alla AB; α l'angolo costante che MT e le altre generatrici di Σ fanno col piano di AB, e φ l'angolo di questo piano colla tangente

in M alla linea di strizione della superficie; e ρ, finalmente, il raggio di curvatura della AB nel punto m.

Il parametro p della generatrice MT è allora dato dalla formola

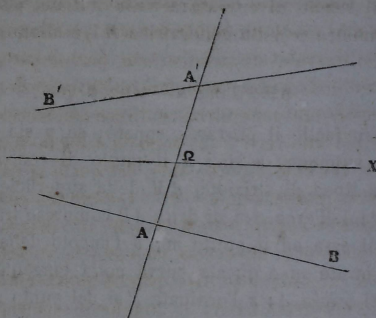
$$p = \rho\,(\text{tang.}\,\alpha - \text{tang.}\,\varphi)\,,$$

com'è ben facile il provare: epperò, se p sia costante, come si suppone, e sia: A il punto di concorso della AB colla linea di strizione AM della superficie Σ; s la lunghezza dell'arco Am di detta AB compreso tra il punto fisso A di essa ed il punto m; θ l'angolo della tangente mT nel punto m a questa curva colla tangente Aa alla stessa nel punto A; z l'ordinata Mm del punto M, misurata a partire dal piano della AB, e perpendicolarmente a questo piano, si avrà pure

$$z = s\,\text{tang.}\,\alpha - p\,\theta \;\ldots\ldots\; (a)$$

Quest'equazione, la quale, quando sieno dati la AB, il punto A di questa linea, e le grandezze costanti α e p, rappresenta completamente la superficie Σ e la sua linea di strizione, dimostra che l'ora detta superficie può avere un'infinità di forme differenti, sempre restando tale che il luogo delle rette ad essa tangenti nei differenti punti di una stessa sua generatrice rettilinea, e facienti angolo massimo col piano della linea AB, sia un iperboloide rigato, le cui dimensioni e forma sono le stesse, qualunque sia la generatrice considerata della Σ.

6. L'iperboloide che è luogo delle tangenti di massima pendenza ad una superficie sghemba qualunque Σ nei differenti punti di una stessa sua generatrice rettilinea AA' (fig. 3ª), di cui il piano centrale sia verticale, non può mai essere di rivoluzione: anzi dicendone a il mag-

Fig. 3ª

giore, b il minore dei suoi semiassi trasversi, e c il semiasse immaginario, fra questi sempre sussiste la relazione

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}.$$

Ed invero, dapprima un asse dell'iperboloide suddetto giace secondo la perpendicolare ΩX al piano centrale di AA' nel punto centrale Ω di questa generatrice: imperocchè, supponendo che i punti A ed A' di detta generatrice sieno ugualmente lontani da Ω, e che BAA', $B'A'A$ sieno i piani tangenti a Σ nei punti A ed A' rispettivamente, questi piani sono ugualmente inclinati ad ΩX, e lo stesso avviene delle rette di massima pendenza condotte in essi piani pel punto di loro contatto colla superficie, le quali rette supporremo essere AB pel primo, ed $A'B'$ pel secondo di essi. Se adunque per un punto qualunque di ΩX si immagina tirato un piano normale a questa retta, esso taglierà le AB, $A'B'$ in due punti tali che la retta,

che li unisce, ha il suo punto di mezzo sulla ΩX, epperò su questa retta cadrà, come si disse, un asse dell'iperboloide in questione. Quest'asse poi sarà il maggiore degli assi trasversi della superficie, perchè per esso passa il piano d'una sezione circolare della medesima.

Inoltre le due generatrici rettilinee dell'iperboloide, che passano pel suo vertice Ω, sono la AA' e la verticale condotta per Ω; cioè l'iperboloide, del quale si parla, è tale che i piani perpendicolari alle generatrici rettilinee, le quali passano per le estremità dell'asse maggiore dell'elisse di gola della superficie, tagliano la superficie stessa secondo le circonferenze. Ora, perchè questa circostanza si verifichi, bisogna che fra le lunghezze succitate dei semiassi della superficie sia soddisfatta la relazione sopra riferita

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2} .$$

7. Si ha poi, manifestamente

$$\frac{b}{c}=\text{tang.}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

ed ancora, poichè il parametro della generatrice AA' è lo stesso tanto allorchè si considera questa come appartenente all'iperboloide in discorso, come quando essa si considera appartenere alla superficie Σ,

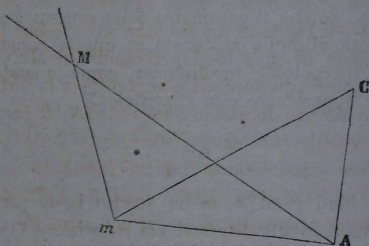
$$p=\frac{bc}{a} .$$

Epperò, dati p ed α, si ha quanto basta per determinare compiutamente di grandezza e posizione l'iperboloide sopraccennato.

8. La superficie rappresentata dalla equazione (a), quando

la linea AB sia una circonferenza, è un elicoide sghembo generale, la cui elica di strizione è segnata sopra un cilindro di rivoluzione avente il suo asse parallelo a quello delle z. E poichè un iperboloide di rivoluzione si può considerare come un caso particolare dell'elicoide sghembo generale, sussisterà anche per esso la proposizione. Cioè, siccome le tangenti ad una superficie di rivoluzione, inclinate ad angolo minimo sull'asse della superficie, sono tangenti al meridiano che passa pel punto di contatto, si potrà affermare che, se pei differenti punti di una stessa generatrice rettilinea di un iperboloide di rivoluzione si conducono le tangenti ai meridiani della superficie che passano per essi punti, il luogo di quelle tangenti è un iperboloide rigato, la cui traccia sul piano di gola dell'iperboloide primitivo è una circonferenza: anzi sarebbe facile il dedurre dalle equazioni sopra riferite che l'ora detta circonferenza passa pel centro dell'iperboloide di rivoluzione, e ne tocca la circonferenza di gola.

9. Ma dimostreremo direttamente, ed in modo sintetico, questa proposizione.

Fig. 4ª

Sia M un punto qualunque d'una generatrice rettilinea

AM di un iperboloide di rivoluzione, il centro del quale sia in C. Rappresenti Mm la tangente in M al meridiano della superficie che passa per M: e sieno A ed m le tracce delle rette MA, Mm sul piano di gola dell'iperboloide. Questa superficie è toccata in M dal piano mMA, epperò la traccia mA di questo piano tangente sul piano di gola è perpendicolare alla traccia mC che ha, su questo piano, il piano meridiano MmC.

Qualunque pertanto sia il punto M considerato sulla generatrice MA della superficie, l'angolo AmC sarà retto: epperò il luogo dei punti m è una circonferenza descritta su CA come diametro, come ci eravamo proposto di dimostrare.

10. Se sull'iperboloide di rivoluzione, anzichè una generatrice rettilinea, si considerasse una sezione fatta in esso con un piano parallelo al suo asse immaginario, o, più generalmente ancora, con un cilindro di rivoluzione attorno ad una retta parallela al detto asse immaginario, cioè una linea Γ, la cui projezione ortogonale γ sul piano del circolo di gola della superficie sia una circonferenza, e nei differenti punti della detta linea Γ si conducessero le tangenti ai meridiani della superficie che passano per essi punti, il luogo di queste tangenti avrebbe per traccia γ' sul piano di gola dell'iperboloide un'altra circonferenza. Dippiù l'equatore della superficie e le circonferenze γ e γ' avrebbero lo stesso asse radicale, il centro dell'equatore sarebbe un centro d'omotetia delle γ e γ', e queste due circonferenze inoltre sarebbero correlative; cioè, se nei differenti punti della linea Γ' dell'iperboloide, che è projettata in γ', si conducono le tangenti ai meridiani di questa superficie, che vi passano, il luogo delle traccie di dette tangenti sul piano equatoriale dell'iperboloide è la circonferenza γ.

foglia, ambi di rivoluzione, e tali che la circonferenza equatoriale dell'uno coincida colla circonferenza equatoriale dell'altro, per le linee Γ e Γ' si prendono le intersezioni del sistema di quelle due superficie coi cilindri di rivoluzione aventi per loro sezioni rette la circonferenza γ e la γ' rispettivamente.

Noteremo ancora che quantunque nel caso, in cui la superficie di rivoluzione è un iperboloide a due foglie, la circonferenza equatoriale C sia immaginaria, adottando una conveniente definizione dell'asse radicale di due circoli, sta anche allora che le circonferenze γ, γ' e C hanno l'asse radicale comune.

12. La linea Γ gode della proprietà dimostrata nel numero 10 perchè, condotta pel centro della superficie di rivoluzione una secante qualunque alla proiezione γ di essa linea sul piano equatoriale della superficie, il prodotto delle distanze di ciascuno dei due punti di intersezione di essa secante colla γ al centro suddetto è indipendente dalla direzione di quella secante. Ora tale circostanza si avvera non solo quando la γ sia una circonferenza, ma allora sempre che, detta z la distanza d'un punto qualunque di essa γ dal punto A, e φ l'angolo, che la retta, su cui si misura la sunnominata distanza, fa con una retta fissa nel piano di quella linea γ, fra z e φ sussista la relazione

$$z^2 - mz f(\varphi) + n^2 = o$$

nella quale m ed n denotano due lunghezze qualunque costanti, e $f(\varphi)$ rappresenta una funzione qualunque dell'ascissa angolare φ.

Quando pertanto la forma di γ è tale, che per ogni suo punto sia soddisfatta l'equazione testè riferita, il luogo

delle tangenti ai meridiani della superficie di rivoluzione nei punti di questa, che si proiettano ortogonalmente al piano equatoriale della superficie sulla linea γ, avrà per traccia su questo piano la linea γ' omotetica, rispetto ad A, alla γ, e correlativa alla medesima, e dippiù la circonferenza equatoriale della superficie di rivoluzione incontrerà ancora la linea γ' negli stessi due punti che essa ha comuni colla γ.

13. La proposizione del n.° 10 può estendersi ancora, ed enunciarsi così:

Sia a un diametro qualunque di una superficie qualunque di 2° grado dotata di centro, A la sezione diametrale, coniugata di a, della superficie; γ una linea segnata nel piano di A, ed omotetica ad essa A; Γ l'intersezione dell'accennata superficie con un cilindro avente γ per direttrice e le generatrici parallele ad a. In ciascun punto di Γ si conduca la tangente alla sezione fatta nella superficie da un piano che passi per esso punto e pel diametro a; le tracce di queste tangenti sul piano di A formano una linea γ' simile e similmente disposta alla γ; il centro della superficie è un centro di omotetia delle γ e γ'; inoltre queste linee sono correlative, cioè quando si prendesse la γ' in luogo della γ, e si facessero poi le costruzioni analoghe alle suindicate, si troverebbe la γ in luogo della γ'.

Sarebbe facile, con metodi ben conosciuti, dedurre in modo sintetico la dimostrazione di questa proposizione da quella data al n° 10: noi però vi arriveremo, anche a cagione di varietà, coll'analisi.

Si prendano per assi coordinati delle z, e delle x ed y rispettivamente, il diametro a, e due diametri coniugati qualunque della sezione A della superficie. Denotando

con m, n, p, q, r, s, quantità costanti, la superficie potrà essere rappresentata dall'equazione

$$(1) \ldots \quad mx^2 + ny^2 + pz^2 = 1 \ ,$$

la linea γ, nel piano delle x ed y, dalla

$$(2) \ldots \quad mx^2 + ny^2 + qx + ry + s = o \ ;$$

il sistema di queste due equazioni rappresenterà quindi la Γ. Un piano qualunque condotto per l'asse delle z ha per equazione

$$(3) \ldots \quad y = ix \ ,$$

essendo i ancora una costante. La sezione fatta nella superficie da questo piano è il luogo del sistema delle equazioni (1) e (3); e la tangente a questa sezione nel punto di essa, che ha per coordinate x, y e z, è rappresentata dalle

$$(4) \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = iX \ , \\ mxX + nyY + pzZ = 1 \ , \end{array} \right.$$

dove X, Y, Z sono le coordinate correnti di detta tangente.

Eliminando x, y, z ed i fra le cinque equazioni ora scritte, e fatto $Z = o$ nella risultante: oppure, ciò che è più spedito, eliminando x, y ed i fra le (2), (3) e le (4), nell'ultima delle quali si sia prima posto $Z = o$, l'equazione che si ottiene

$$smX^2 + snY^2 + qX + rY + 1 = o$$

appartiene alla γ': e la sua forma prova ad evidenza le sopra enunciate relazioni di forma e posizione delle linee γ e γ'. Risulta ancora dalla trovata equazione di γ', che

i punti di intersezione di questa linea con A coincidono con quelli che sono comuni ad A e γ, e sono collocati sulla retta, che ha per equazione

$$qX + rY + s + 1 = o .$$

La proposizione in discorso, opportunamente modificata, si verifica ancora quando il centro della superficie di 2° grado considerata sia infinitamente lontano.